OPTION P' - 2EME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(DUREE : 4 HEURES)

L'énoncé de cette épreuve, spécifique aux candidats de l'option P', comporte 3 pages.

Il est demandé expressément aux candidats de donner des démonstrations précises et rigoureuses. Aucun raisonnement vague ou insuffisant ne sera pris en considération par le correcteur.

On note $\mathbb{C}(2)$ l'algèbre des matrices complexes 2 x 2. Soit K le sous-ensemble de $\mathbb{C}(2)$ composé des matrices de la forme :

$$q = \begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$$

dans lesquelles : $u = \alpha - i\delta$, $v = \gamma - i\beta$; les nombres réels $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ seront appelés les paramètres de q. (^tA désigne la transposée de A). Nous poserons :

- norme de $q = \|q\| = (\det q)^{1/2}$;
- $q^* = \bar{^tq}$;
- $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
- $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

I.1°) Vérifier que la matrice M de $\mathbb{C}(2)$ appartient à K si et seulement si $CMC^{-1} = \bar{M}$, que K est un espace vectoriel réel de dimension quatre et que la fonction : $q \to \|q\|$ est une norme sur K.

2°) Montrer que le produit de deux éléments de K est encore un élément de K.

3°) Calculer q^*q et qq^* et exprimer $\|qq'\|$ en fonction de $\|q\|$ et $\|q'\|$.

4°) En déduire que tout élément non nul de K est inversible, et que son inverse est dans K.

5°) Montrer que le sous-ensemble G des éléments de K de norme égale à 1, forme un groupe pour la multiplication.

II. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, dont on désigne les vecteurs par une lettre minuscule surmontée d'une flèche, la base canonique par $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, et le produit scalaire par :

$$(\vec{x}|\vec{y}) = (\vec{e}_1x_1 + \vec{e}_2x_2 + \vec{e}_3x_3 | \vec{e}_1y_1 + \vec{e}_2y_2 + \vec{e}_3y_3) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

.../...

A chaque vecteur $\vec{x} = \vec{e}_1 x_1 + \vec{e}_2 x_2 + \vec{e}_3 x_3$ de $\mathbb{R}^3$, on fait correspondre la matrice, désignée par la lettre majuscule correspondante, X :

$$X = \phi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix} \text{ et l'on pose } \|X\| = \|\vec{x}\|$$

On désigne par H l'ensemble des matrices $\phi(\vec{x})$.

1°) Vérifier que H est un sous-espace vectoriel réel de $\mathbb{C}(2)$, et que ϕ est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur H.

Calculer les valeurs propres de la matrice X.

2°) Si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, on note $\alpha = (\vec{x}|\vec{y})$ et (β,γ,δ) les composantes du produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{y}$. Soient $X = \phi(\vec{x})$ et $Y = \phi(\vec{y})$. Calculer $\frac{1}{2}(XY + YX)$, $\frac{1}{2}(XY - YX)$ et exprimer YX en fonction de $(\vec{x}|\vec{y})$ et de $\phi(\vec{x} \wedge \vec{y})$ ainsi qu'en fonction d' $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.

3°) Montrer que $q = YX$ appartient à K et calculer $\|q\|$ en fonction de $\|X\|$ et $\|Y\|$.

4°) Montrer que toute matrice q de K peut être écrite d'une façon et d'une seule $q = \alpha I - iA$, où $A = \phi(\vec{a}) \in H$ et exprimer $\|q\|$ en fonction de α et $\|\vec{a}\|$.

5°) Montrer que toute matrice q de K peut être écrite comme produit de deux matrices de H : $q = YX$.

III. Les seules matrices de K qui seront désormais utilisées seront de norme 1 : elles forment le groupe G du n° I.5°).

1°) On écrit $q \in G$ sous la forme $q = \alpha I - iA$ du n° II.4°) avec $A = \phi(\vec{a})$.

Si $X \in H$, montrer que qXq^{-1} est une matrice X' de H représentant le vecteur $\vec{x}' = \tilde{q}(x)$ défini par la formule (dite d'Euler) :

$$\vec{x}' = \tilde{q}(\vec{x}) = (\alpha^2 - \|\vec{a}\|^2)\vec{x} + 2(\vec{a}|\vec{x})\vec{a} + 2\alpha\vec{a} \wedge \vec{x}$$

2°) Montrer que $\|\tilde{q}(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$, que $(\tilde{q}(\vec{x})|\tilde{q}(\vec{y})) = (\vec{x}|\vec{y})$ et que $\tilde{q}(\vec{a}) = \vec{a}$.

3°) Calculer en fonction des paramètres $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ de q les coefficients de la matrice $\tilde{q}$ qui fait passer de $\vec{x}$ à $\vec{x}'$ dans $\mathbb{R}^3$.

4°) A $q \in G$, on associe l'angle θ : $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, défini par $\alpha = \cos\frac{\theta}{2}$, et, si θ est différent de 0 et de 2π, le vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$: $\vec{\ell}$, défini par : $\vec{\ell} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$.

Soient alors $\vec{m}$ un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à $\vec{\ell}$ et $\vec{n} = \vec{\ell} \wedge \vec{m}$.
Montrer que $\tilde{q}$ fait tourner $\vec{m}$ et $\vec{n}$ de l'angle θ autour de l'axe défini par $\vec{\ell}$.
En déduire la caractérisation géométrique de $\tilde{q}$. Cas où $\theta = 0$ ou 2π.

.../...

5°) Déduire de ce qui précède que l'application $q \to \tilde{q}$ est un homomorphisme du groupe G sur le groupe des rotations R qui détermine une bijection entre R et l'ensemble des couples de points diamétralement opposés de la sphère unité S_3 de $\mathbb{R}^4$.

Rappel : $S_3 = \{x | x \in \mathbb{R}^4 : \|x\| = 1\}$

IV. Soit $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ la base canonique de l'espace vectoriel complexe $\mathbb{C}^2$. A chaque vecteur $s = \varepsilon_1 s_1 + \varepsilon_2 s_2$ de $\mathbb{C}^2$, on fait correspondre la matrice-colonne $S = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix}$ de ses composantes, et le vecteur $\vec{\theta}(s)$ de $\mathbb{R}^3$ défini par la condition :

$${}^t S\, {}^t X \bar{S} = (\vec{x} | \vec{\theta}(s)) \text{ où } X = \phi(\vec{x}) \quad (n° II) .$$

On pose $\|s\| = (|s_1|^2 + |s_2|^2)^{1/2} = (s_1\bar{s}_1 + s_2\bar{s}_2)^{1/2}$.

1°) Calculer les composantes du vecteur $\vec{y} = \vec{\theta}(s)$ en fonction de s_1, s_2. Montrer que $\|\vec{\theta}(s)\| = \|s\|^2$.

Si Y est la matrice $\phi(\vec{y}) = \phi(\vec{\theta}(s))$ (n°II), trouver les valeurs propres et les vecteurs propres de Y.

2°) Montrer que $\vec{\theta}(qs) = \tilde{q}(\vec{\theta}(s))$ quel que soit $q \in G$.

3°) Montrer qu'à chaque s de $\mathbb{C}^2$ correspond une matrice et une seule de K, notée q_s, telle que $q_s(\varepsilon_1) = s$. Soit $\sum_1$ la sphère unité que forment les vecteurs s de $\mathbb{C}^2$ de norme 1. Vérifier que : " $s \in \sum_1$ " est équivalent à : " $q_s \in G$ ". Montrer que, quels que soient les éléments s et t de $\sum_1$, il existe un élément unique q de G tel que $qs = t$.

4°) Montrer que si $s \in \sum_1$, $\vec{\theta}(s) = \tilde{q}_s(\vec{e}_3)$.

5°) Montrer que ϑ applique la sphère $\sum_1$ sur la sphère unité S_2 de $\mathbb{R}^3$. Montrer que si $s \in \sum_1$, l'ensemble des t de $\sum_1$ tels que $\vec{\theta}(t) = \vec{\theta}(s)$ est un cercle, intersection de $\sum_1$ et de la droite complexe portant s.

Rappel : $S_2 = \{x | x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$

---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail